1. *Från "Klassiker"* På vilken höjd h över bordsytan ska biljarkulan stötas så att den rullar iväg utan att glida. Svar i termer av k och R där tröghetsmomentet av kulan är kmR^2.

   Svar: Stötkraft ger rörelsmängd $mv = F(\Delta t)$ och rörelsmängdsmoment $I\omega = F(\Delta t)(h - R)$. Vi tar kvoten mellan dessa utryk och får därmed

$$\frac{I\omega}{mv} = (h - R)$$

   Vi ersätter $mv = \omega R$ och $I = kmR^2$ och får, efter vi kancellerar faktorer $m\omega R$ i täljare och nämnare $kR = (h - R)$ varvpå vi får svaret $h = (k + 1)R$

2. En vagn med massa m är uppställd enligt figuren. ...

   - (1p) Skriv ner differentialekvationen för x.
   - (2p) Beräkna kvoten a/b och förenkla uttrycket när $\omega = \sqrt{k/m}$.

   Svar: Balansera krafterna. Det är viktigt att alla tecken blir korrekt

$$F = -kx - c_1\dot{x} - c_2(\dot{x} - \dot{x_B}) = m\ddot{x}$$

   Vi ersätter nu formeln för x_B och löser för $\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{c_1 + c_2}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = -\frac{c_2}{m}\, b\,\omega\, \sin\omega t$$

   Vi gör nu en ansats: $x(t) = ae^{i\omega t}$ där vi tar fram realdelen som lösning. Vi noterar också att $-\sin\omega t = Re(\, ie^{i\omega t}\,)$. Vi finner, efter att kancellera $e^{i\omega t}$ i båda led

$$-\omega^2 a + i\omega\frac{c_1 + c_2}{m}a + \frac{k}{m}a = \frac{ibc_2\omega}{m}$$

   och får därigenom

$$a = \frac{ic_2\omega}{(k - m\omega^2) + i\omega\,(c_1 + c_2)}\; b$$

   Eftersom $x = Re(ae^{i\omega t}) = |a|\cos(\psi + \omega t)$ där ψ är en fas (som vi kan, men inte räknar fram) får vi amplituden genom att ta beloppen på de komplexa talen.

$$\frac{|a|}{|b|} = \frac{c_2\omega}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2(c_1 + c_2)^2}}$$

   vilket förenklas när $k = m\omega^2$ till

$$\frac{|a|}{|b|} = \frac{c_2}{c_1 + c_2}$$

3. En icke-tunn stav är monterad symmetriskt på en friktionsfri axel genom stavens mittpunkt. Axeln i sin tur är monterad på en roterande skiva som roterar med konstant Ω. ... Variabeln θ mäter vinkeln av staven relativt horisontalplanet. Huvudtröghetsmomenten av staven runt mass-centrum är ...

   Svar: Vi uttrycker $\vec{\omega}$ i rumskoordinaten

$$\omega = \Omega \cos\theta \hat{x} + \dot{\theta}\hat{y} + \Omega \sin\theta \hat{z}$$

   och $H = I\omega$. Vi noterar formeln $\vec{M} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{H} + \vec{\omega} \times \vec{H}$ och att $M_y = 0$ eftersom staven roterar friktionsfritt runt denna axel.

   För att få fram en ekvation för θ räcker det att ta fram enbart denna komponent ur ekvationen. Vi ser att $0 = M_y = I_2\ddot{\theta} + \Omega_z H_x - \Omega_x H_z$ vilket ger

$$0 = I_2\ddot{\theta} + \Omega^2 \left(I_1 \sin\theta \cos\theta - I_3 \cos\theta \sin\theta\right)$$

   Genom att använda dubbelvinkel formeln och faktorsiera, kan vi nu förenkla detta till

$$\ddot{\theta} + \frac{I_1 - I_3}{2I_2}\,\Omega^2\ \sin 2\theta = 0$$

   Intressant är att för en lång och smal stav då $I_3 \ll I_2$, blir stabila läget med symmetriaxeln horisontellt , medan för en kort och fet stav, typ hockeypuck där $I_3 > I_2$, blir symmetriaxeln längs $\hat{Z}$.

   Hur kommer det sig? “Centrifugal kraften” drar ändarna ut mot horisontella planet. Därför horisontellt stabilt läge för lång stav. Medan med pucken blir det motsatta.

4. En massa m, kopplad till en fjäder ...

   Svar:

   Vi kan lösa detta på flera sätt; LaGrangian går utmärkt; energimetoden likaså. Vi använder energimetoden.

   Vi noterar först att systemet som består av rampen och klossen inte påverkas av yttre krafter, så den totala rörelsemängd av de två klossarna är bevarad och därför blir masscentrum i vila om den börjar i vila. Inledningsvis antar vi att masscentrum är i vila.

   Därför får vi ett tvång mellan x och y från att masscentrum är bevarat:

$$Mx + m(x + y\cos\alpha) = konstant$$

   Vi räknar nu ut kinetiska energin och använder också tvånget för att bli av med variabeln x. :

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m((\dot{x} + \dot{y}\cos\alpha)^2 + \dot{y}^2\sin^2(\alpha)) \\ &= \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}(m(\tfrac{M}{m})^2\ \dot{x}^2 + m\dot{y}^2\ \sin^2\alpha) \end{aligned}$$

   Vi lägger nu till potentialenergin

$$E_{tot} = \tfrac{1}{2}\tfrac{M}{m}(M+m)\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{y}^2\ \sin^2\alpha - [mgy\sin\alpha] + \tfrac{1}{2}ky^2$$

   Genom att skifta y till jämnviktsläget kan vi ignorera termen i hakparantes, precis som vi gjorde med en hängande fjäder. Lite intressant och kanske förvånande är att gravitationskonstanten försvinner ur beräkningen. Vi löser också för $\dot{x}$ tvånget och får därmed $\dot{x} = -\frac{m}{M+m}\dot{y}\ \cos\alpha$ vilket vi kan nu ersätta i E_{tot}.

$$E_{tot} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{Mm}{M+m}\cos^2\alpha + m\ \sin^2\alpha)\dot{y}^2 + \tfrac{1}{2}ky^2 \equiv \tfrac{1}{2}M_0\dot{y}^2 + \tfrac{1}{2}ky^2$$

   Vi identifierar detta som en harmonisk oscillator som har $\omega^2 = k/M_0$ så vi får

$$\omega^2 = \frac{k}{\frac{Mm}{M+m}\cos^2\alpha + m\sin^2\alpha}$$

   som kan skrivas på olika sätt som

$$\omega^2 = \frac{k(M+m)}{Mm\cos^2\alpha + (M+m)m\sin^2\alpha} = \frac{k(M+m)}{m(M+m\sin^2\alpha)}$$

   I gränsen $M \to \infty$ och för $\alpha = \pi/2$ får vi $\omega^2 = k/m$ vilket är bekant för en hängande fjäder; likaså en fjäder som rör sig friktionsfritt på en fast friktionsfri yta. Det påpekas att för $\alpha = 0$ har vi $1/M_0 = 1/m + 1/M$ vilket kallas reducerad massa och förkommer i system där rörelse beskrivs relativt masscentrum.

   Vi har beskrivit en av de två egenmoderna. Den andra blir $y = konstant$ och $\dot{x} = konstant$ motsvarande konstant rörelse vilket har $\omega^2 = 0$.

5. En röd pärla med massan m glider friktionsfritt på ringen med radien R. Ringen har massa M ...

Svar: Kinetisk energi. Eftersom ringens kintetiska energi består av $1/2MV^2 + 1/2I\dot{\alpha}^2$ och $I = MR^2$,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2)^2 + \frac{1}{2}(2MR^2)\dot{\alpha}^2$$

Eftersom $\hat{\vec{r}_1} \cdot \hat{\vec{r}_2} = \cos\beta$ och $\vec{r}_1 = R\hat{r}(\alpha)$ och $\vec{r}_2 = R\hat{r}(\alpha+\beta)$ får vi

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{m}{2}R^2(\dot{\alpha}^2 + (\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2 + 2\dot{\alpha}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\cos\beta) + M\dot{\alpha}^2R^2 \\ &= m2R^2(\dot{\alpha}^2(2+2\cos\beta) + \dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}(2+2\cos\beta) + MR^2\dot{\alpha}^2 \\ &= mR^2(\dot{\alpha}^2(1+\cos\beta) + \dot{\alpha}\dot{\beta}(1+\cos\beta) + \tfrac{1}{2}\dot{\beta}^2) + MR^2\dot{\alpha}^2 \\ &= mR^2(2\dot{\alpha}^2\cos^2\tfrac{1}{2}\beta + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos^2\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\dot{\beta}^2) + MR^2\dot{\alpha}^2 \end{aligned}$$

Så vi får Lagrangian

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= R^2\left(2m\cos^2(\tfrac{1}{2}\beta) + M\right)\dot{\alpha}^2 + R^2\left(2m\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos^2(\tfrac{1}{2}\beta) + \tfrac{1}{2}mR^2\dot{\beta}^2\right) + \\ &+ MgR\cos\beta + mgR(\cos(\beta) + \cos(\alpha+\beta)) \end{aligned}$$

Utveckla hela $\mathcal{L}$ till andra ordning i $\alpha\beta, \dot{\alpha}$ och $\dot{\beta}$ och släng konstant. Sätt $M = m$ för att förenkla

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \approx\ & R^2(2m+M)\dot{\alpha}^2 + R^2 2m\dot{\alpha}\dot{\beta} + \tfrac{m}{2}R^2\dot{\beta}^2 + \\ & - \left(\tfrac{1}{2}MgR\alpha^2 + \tfrac{m}{2}gR(\alpha^2 + (\alpha+\beta)^2)\right) \end{aligned}$$

den sista termen blir $\frac{1}{2}mR(3\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)$ så vi kan läsa av matriserna vars determinant ska bli noll

$$\det\left(-mgR^2\omega^2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{mgR}{2}\right)$$

i.e.

$$\det\begin{pmatrix} -3\omega^2 + 3\frac{g}{2R} & -\omega^2 + \frac{g}{2R} \\ -\omega^2 + \frac{g}{2R} & -\frac{1}{2}\omega^2 + \frac{g}{2R} \end{pmatrix}$$

Låt $\lambda = \omega^2\frac{2R}{g}$

$$\det\begin{pmatrix} 3(-\lambda+1) & -\lambda+1 \\ -\lambda+1 & -\frac{1}{2}\lambda+1 \end{pmatrix}$$

Vi får, eftersom *det* har en gemensam faktor $1-\lambda$

$$0 = 3(1-\lambda)(1-\frac{1}{2}\lambda) - (1-\lambda)^2$$

$$0 = (1-\lambda)(2-\frac{1}{2}\lambda)$$

i.e. $\omega^2 = \frac{g}{2R}$ and $\omega^2 = \frac{2g}{R}$. Om $g = 0$ försvinner potentialtermerna och vi får den kinetiska $\mathcal{L}$. Vi ser att α inte förekommer. Därför blir derivatan map $\dot{\alpha}$ en rörelsekonstant dom motsvarar rörelsemängdsmomentet runt axeln.

$$p_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\alpha}} = 2R^2\dot{\alpha}(2m\cos^2(\frac{\beta}{2}) + M) + 2mR^2\dot{\beta}\cos^2(\frac{1}{2}\beta)$$