Omtenta i Mekanik 2 (FFM521)

Tid och plats: Torsdagen den 24 august 2017 klockan 08.30-12.30 Johanneberg. .
Hjälpmedel: Godkänd minikräknare och Matte Beta
Examinator: Stellan Östlund
Jour: Stellan Östlund, tel. 0767619006, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 11.30.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

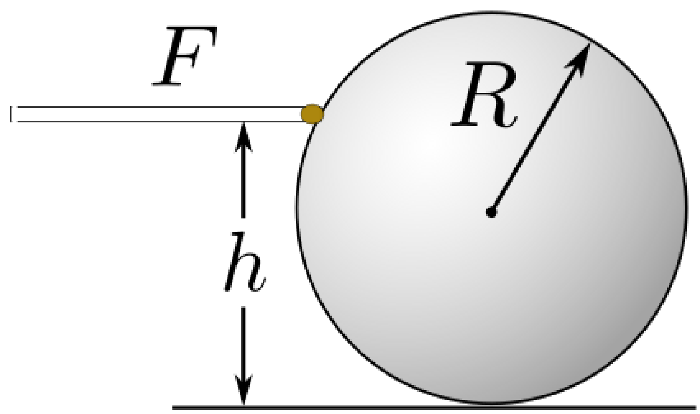
- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Betygsgrunder: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 15 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst fem poäng. 13-15 poäng ger betyg 5, 9-12 poäng ger betyg 4, och 5-8 poäng ger betyg 3.

Rättningsgranskning: 25 September 2017, 12:00 Signes

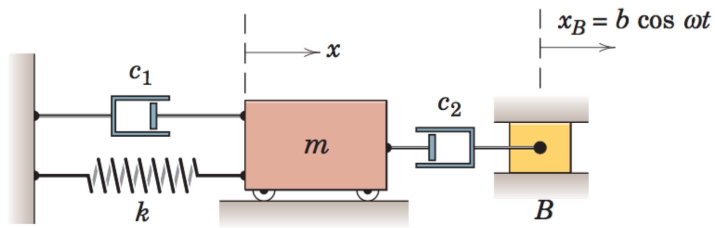
OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

1. *Från "Klassiker"* På vilken höjd h över bordsytan ska biljarkulan stötas så att den rullar iväg utan att glida. Svar i termer av k och R där tröghetsmomentet av kulan är kMR^2.

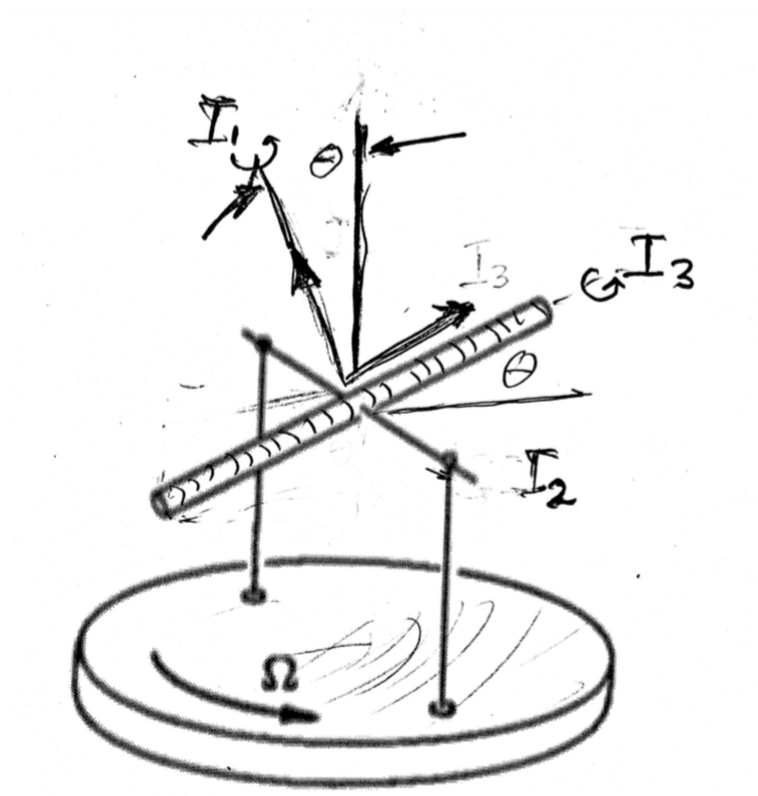


2. En vagn med massa m är uppställd enligt figuren. Fjädern till vänster är osträckt vid $x = 0$. Dämpningskonstanterna c_i är definierade som vanligt och beskriver alltså proportionaliteten mellan den motverkande kraften till hastigheten av den lilla kolven inuti vardera stötdämpare. Den gula massan till höger beskrivs av koordinaten $x_B = b\cos\omega t$ som alltså drivs med en harmonisk rörelse med amplitud b. Efter en längre tid blir $x(t)$ harmonisk med en amplitud som betecknas a.

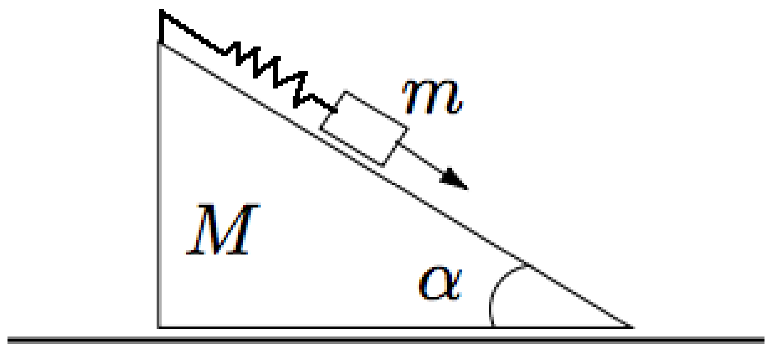
- (1p) Skriv ner differentialekvationen för x.
- (2p) Beräkna kvoten a/b och förenkla uttrycket när $\omega = \sqrt{k/m}$.



3. En icke-tunn stav är monterad symmetriskt på en friktionsfri axel genom stavens mittpunkt. Axeln i sin tur är monterad på en roterande skiva som roterar med konstant Ω. Variabeln θ mäter vinkeln av staven relativt horisontalplanet. Huvudtröghetsmomenten av staven runt mass-centrum är I_3 längs staven som ritad, I_2 längs axeln, och I_1 i den återstående riktningen. Beräkna en exakt diffrentialekvation för θ.

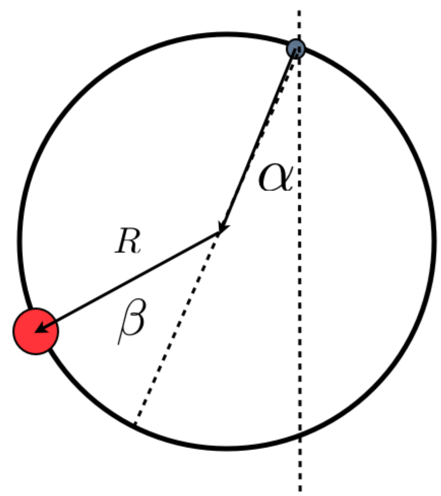


4. En massa m, kopplad till en fjäder med fjäderkonstant k, glider friktionsfritt på en ramp med massa M i ett gravitationsfält g som i sin tur glider friktionsfritt på en plan yta. Med valfri metod, beräkna egenfrekvenserna för små svängningar. Kontrollera de två specialfallen $M \to \infty$ och $\alpha = \pi/2$ i ditt svar. Dessa gränser måste återges korrekt för att formeln skall vara rimlig.



5. En pärla med massan m glider friktionsfritt på ringen med radien R. Ringen har massa M och roterar friktionsfritt i ett vertikalt plan runt en axel på ringens kant. Vinkeln α beskriver är den mellan axeln och ringens mass centrum relativt gravitationsriktningen. Avståndet β beskriver pärlans läge på ringen. Svara på följande deluppgifter i termer av de generaliserade koordinaterna α och β. *Tröghetmomentet för ringen runt mass centrum är* MR^2

- Beräkna Lagrangian och Lagranges ekvationer
- Låt gravitationskonstanten vara noll och beräkna och identifiera en rörelsekonstant. I detta fall, teckna ett uttryck för $\frac{d\alpha}{d\beta}$
- Beräkna egenfrekvenserna för små oscillationer runt jämvikt i specialfallet $M = m$.



Lycka till!

Formelblad

Ni får behålla detta formelblad för andra delen av tentan

- $R_\Omega(\theta)_{ij} = \delta_{i,j} cos(\theta) + (1 - cos(\theta))\Omega_i\Omega_j - sin(\theta)\,\epsilon_{ijk}\Omega_k$
- $Tr(R_{\hat\Omega})(\theta) = 1 + 2\cos(\theta)$
- $\Sigma\ \epsilon_{kij}\ \left(R_{\hat\Omega}(\theta)\right)_{ij} = -2\sin(\theta)\hat\Omega_k$
- $I_{ij} = \sum_{\vec r} m_{\vec r}(\delta_{ij}(\vec r)^2 - \vec r_i \vec r_j)$
- $(I_{tot})_{ij} = \sum (I_{cm})_{ij} + M\,(R^2\delta_{ij} - R_i R_j)$
- *(MK 7/6)* $v_A = v_B + \omega \times r + v_{rel}$
- *(MK 7/6)* $a_A = a_B + \dot\Omega \times r_{A/B} + 2\Omega \times v_{rel} + \Omega \times (\Omega \times r_{A/B}) + a_{rel}$
- *(MK 7/7,7/7a)* $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \Omega \times A$
- $0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot q} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q}$
- $p = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot q}$
- $H(p, q) = p\dot q - \mathscr{L}$
- $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot q$
- $\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot p$
- $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{i,m}\delta_{j,n} - \delta_{i,n}\delta_{j,m}$
- $(A \times B)\cdot(C \times D) = (A \cdot C)\ (B \cdot D\ ) -\ (A \cdot C)(B \cdot C)$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; $\qquad \sin(a + b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$
- $\frac{\sin a}{A} = \frac{\sin b}{B} = \frac{\sin c}{C}$ *där* A, B *och* C *är längden av sidorna mittemot vinkeln* a, b *och* c.
- $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + O(\theta^6)$; $\qquad \sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + O(\theta^5)$.
- $|\vec A \times \vec B| = |A|\,|B|\,\sin\theta_{AB} \qquad |\vec A \cdot \vec B| = |A|\,|B|\,\cos\theta_{AB}$.